DEV : Théorème de Pappus

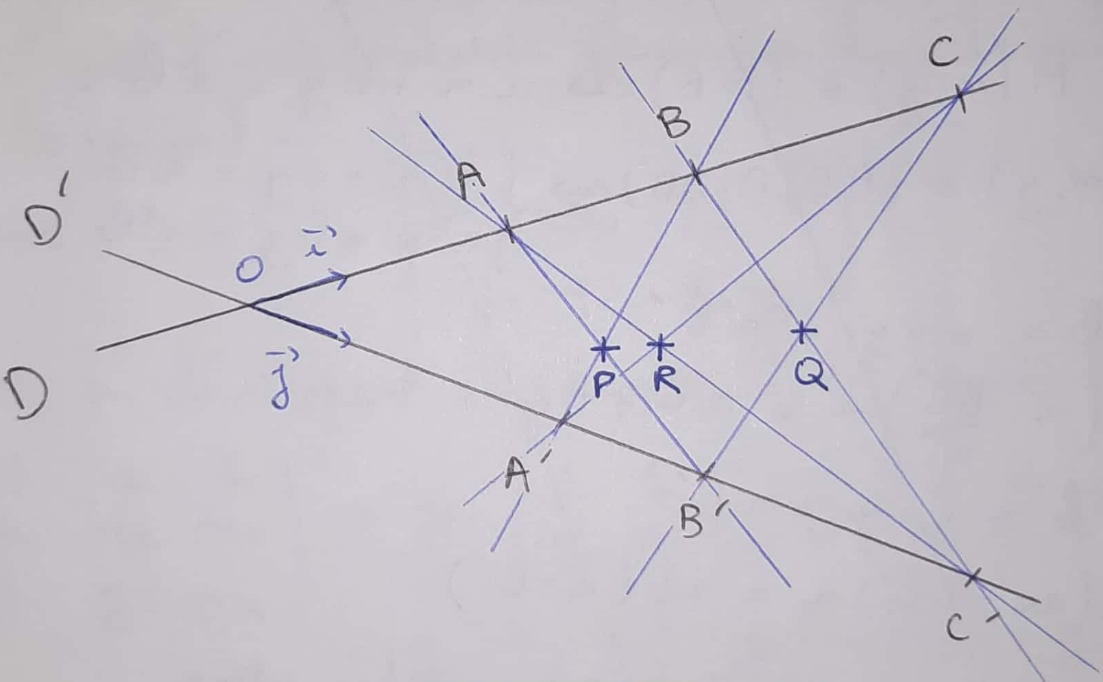
Référence(s) : Francinou / Gianella / Nicolas - Algèbre 3 (p 246)

Recasages : 149 - 162 - 191 .
(bof bof ...)

Énoncé : Soient D, D' deux droites affines sécantes d'un plan vectoriel réels. Soient $A, B, C \in D \setminus D'$ distincts et $A', B', C' \in D' \setminus D$ distincts.

On suppose $\begin{cases} (AB') \cap (A'B) = P \\ (BC') \cap (B'C) = Q \\ (CA') \cap (C'A) = R \end{cases}$

Alors les points P, Q et R sont alignés.



Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note les coordonnées suivantes :

$A(a,0)$ $\quad A'(0,a')$

$B(b,0)$ $\quad B'(0,b')$

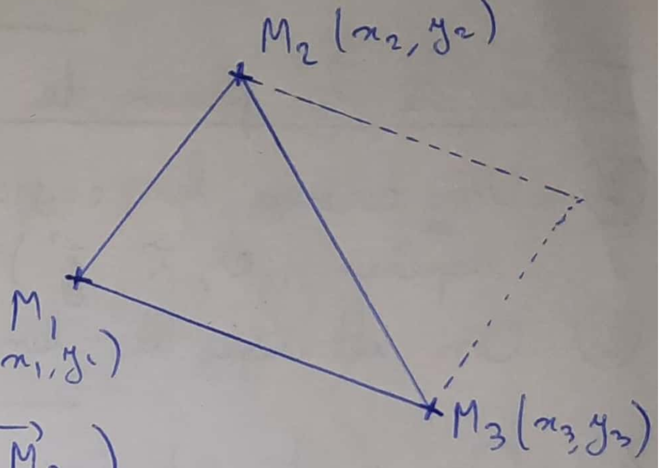
$C(c,0)$ $\quad C'(0,c')$

Remarquons que a, b, c, a', b', c' sont tous non nuls car tous les points sont distincts de O par définition.

Lemme :

$M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$ sont alignés

$$\iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 .$$



Preuve du lemme :

Soit T le triangle de sommets M_1, M_2, M_3.

Par définition, on a :

$$\underbrace{2A_T}_{\text{aire du triangle}} = \det(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$$

(c'est l'interprétation géométrique du déterminant dans le plan).

donc $2A_T = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$.

Or, en développant par rapport à la dernière ligne, on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = y_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} - y_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} + y_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$= y_1(x_3-x_2) - y_2(x_3-x_1) + y_3(x_2-x_1)$$

$$= (y_3-y_1)(x_2-x_1) + y_1(x_2-x_1) + y_1(x_3-x_2) - y_2(x_3-x_1)$$

$$= (y_3-y_1)(x_2-x_1) + (y_1-y_2)(x_3-x_1)$$

$$= (y_3-y_1)(x_2-x_1) - (y_2-y_1)(x_3-x_1)$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

$$= 2A_T$$

Or, M_1, M_2, M_3 sont alignés $\iff A_T = 0$

d'où :

M_1, M_2, M_3 alignés $\iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$.

Idée de la preuve de Pappus :

(1) On trouve les coordonnées de P, Q et R dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(2) On utilise le lemme pour conclure.

---

(1) On sait :

$M(x, y) \in (AB') \iff \vec{AM}$ et $\vec{AB'}$ sont colinéaires

$\iff \det(\vec{AM}, \vec{AB'}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x-a & -a \\ y & b' \end{vmatrix} = 0$

$\iff (x-a)b' + ay = 0$

$\iff b'x + ay = ab'$

(On a en fait determiné l'équation de la droite (AB').)

De même : $M(x, y) \in (A'B) \iff a'x + by = a'b$

Ainsi :

$M(x, y) \in (AB') \cap (A'B) \iff \begin{cases} b'x + ay = ab' \\ a'x + by = a'b \end{cases}$ (S)

(S) est un système de 2 équations à 2 inconnues, de matrice correspondante $A = \begin{pmatrix} b' & a \\ a' & b \end{pmatrix}$.

De plus, $\det(A) = bb' - aa' \neq 0$ car les droites (AB') et $(A'B)$ sont sécantes (donc les vecteurs associés ne sont pas colinéaires)

Ainsi, $A \in GL_2(\mathbb{R})$ donc (S) est un système de Cramer, et :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} ab' & a \\ a'b & b \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{abb' - aa'b}{bb' - aa'} = \frac{ab(b'-a')}{bb'-aa'} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} b' & ab' \\ a' & a'b \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{a'bb' - aa'b'}{bb'-aa'} = \frac{a'b'(b-a)}{bb'-aa'}$$

On a trouvé les coordonnées de P (que l'on note x_P, y_P)

De même, $Q\left(\frac{bc(c'-b')}{cc'-bb'} ; \frac{b'c'(c-b)}{cc'-bb'}\right)$

et $R\left(\frac{ac(a'-c')}{aa'-cc'} ; \frac{a'c'(a-c)}{aa'-cc'}\right)$

② D'après le lemme, P, Q et R sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_P & x_Q & x_R \\ y_P & y_Q & y_R \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $\begin{vmatrix} bb'-aa' & cc'-bb' & aa'-cc' \\ ab(b'-a') & bc(c'-b') & ac(a'-c') \\ a'b'(b-a) & b'c'(c-b) & a'c'(a-c) \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array}$$

ce qui est le cas,

car $cc'C_1 + aa'C_2 + bb'C_3 = 0$

donc (C_1, C_2, C_3) est liée.

Ainsi, P, Q et R sont alignés.